ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE 1982

PREMIÈRE INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES (3 h)

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

SUJET N° 1 - On considère dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormal $Oxyz$, les trois droites :

d_1 contenant le point $(0,0,1)$ et de vecteur directeur $(1,1,1)$.

d_2 d'équations $y = 0 = z$.

d_3 d'équations $x + y = 0 = y + z + 1$.

1/ a) Écrire les équations paramétriques de d_1, puis les équations paramétriques de la droite m_1m_2 joignant un point m_1 de d_1, d'abscisse α, à un point m_2 de d_2, d'abscisse β.

b) Trouver la relation entre α et β pour que la droite m_1m_2 rencontre d_3.

c) Écrire, dans cette hypothèse, les équations paramétriques de la droite m_1m_2.

2/ Déduire de 1/c) que les droites Δ qui rencontrent d_1, d_2, d_3 sont sur la quadrique Q d'équation $xz = y(y + 1)$.

Quelle est la nature de cette quadrique ?

3/ Montrer que :

a) Sur Q existent deux systèmes de droites dont l'un est constitué par les droites Δ et dont l'autre contient d_1, d_2, d_3.

b) Par tout point de Q passe une droite et une seule de chaque système.

c) Toute droite de l'un des systèmes rencontre toute droite de l'autre système ou lui est parallèle.

SUJET N° 2 - On considère le mouvement plan d'un point dans lequel la composante tangentielle et la composante normale de l'accélération ont chacune une valeur constante égale à 1.

$Oxyz$ est un repère orthonormal.

1/ Soient, au point $M(t)$ de la trajectoire C, $R(t)$ le rayon de courbure et $s(t)$ l'abscisse curviligne.

Calculer $s(t)$, $R(t)$ et exprimer R en fonction de s.

2/ Soit $\varphi(t)$ l'une des mesures de $\widehat{Ox, MT}$ où MT est la tangente orientée à C au point $M(t)$. On suppose $\varphi(t)$ choisie de manière qu'elle soit fonction continue de t.

Exprimer s et les coordonnées x et y de $M(t)$ en fonction de φ, puis trouver l'équation polaire de C.

Quelle est la nature de cette courbe ?

On donne les conditions initiales suivantes : Mesure de la vitesse initiale $v(0) = 1$,

$s(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $x(0) = \frac{2}{5}$, $y(0) = -\frac{1}{5}$.

SUJET N° 3 - On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer A^2, A^3, A^p pour tout $p > 0$. On pose $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ a) Calculer pour tout $n > 0$, la matrice $B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{t^p A^p}{p!} = \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & 0 \\ \beta_n(t) & \gamma_n(t) \end{pmatrix}$, t réel.

b) Montrer que, quand $n \longrightarrow +\infty$, $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\gamma_n(t)$ ont des limites respectives $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ qu'on déterminera.

On note $B(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}$

c) On identifie toute matrice $T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ au vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$. On traduit les résultats du

.../...

2/ b) en disant que $B_n(t) \longrightarrow B(t)$. Montrer que cela équivaut à dire que $B_n(t) \longrightarrow B(t)$ au sens d'une norme classique sur $\mathbb{R}^3$.

3/ a) Montrer que pour tous nombres réels t et u on a $B(t+u) = B(t) \cdot B(u)$.

b) Pour tout réel t on pose $B'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) & 0 \\ \beta'(t) & \gamma'(t) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'au sens d'une norme classique sur $\mathbb{R}^3$ cela signifie que $\frac{B(t+h)-B(t)}{h} \longrightarrow B'(t)$ quand $(h \to 0,\ h \neq 0)$.

c) Montrer qu'on a $B'(t) = A \cdot B(t) = B(t) \cdot A$.

d) Les propriétés 3/a) et 3/c) vous rappellent-elles celles d'une fonction classique ?

e) Soit X_0 la matrice colonne constante $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
On pose $X(t) = B(t) \cdot X_0$ (1).

Montrer qu'on a $X'(t) = B'(t) \cdot X_0$ et que la formule (1) donne les solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants, du 1er ordre $X'(t) = A \cdot X(t)$.

SUJET N° 4 - On considère l'ensemble E des fonctions définies dans $\mathbb{R}$ et de la forme $t \longmapsto e^{-t^2} \cdot P(t)$ où P est une fonction polynôme à valeurs complexes.

1/ Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

2/ Montrer que pour tout couple (f,g) d'éléments de E, l'intégrale $\varphi(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$

est convergente et que $(f,g) \longmapsto \varphi(f,g)$ définit une forme hermitienne positive non dégénérée sur E.

3/ Soient r et s les applications de E dans E respectivement définies par $f(t) \longmapsto tf(t)$ et $f(t) \longmapsto if'(t)$. (i est le nombre complexe habituel).

a) Montrer que r et s sont des endomorphismes de E et qu'on a, quelles que soient f et g dans E :

$\varphi(r(f),g) = \varphi(f,r(g))$ et $\varphi(s(f),g) = \varphi(f,s(g))$,

c'est-à-dire que r et s sont leurs propres adjoints.

b) Vérifier la relation $i(rs - sr) = Id_E$ (Id_E désigne l'endomorphisme identique de E).

4/ On pose $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(r - is)$, $u^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(r + is)$ et $v = u^* u$.

a) Montrer qu'on a $uu^* - u^*u = Id_E$ et $vu^* - u^*v = u^*$.

b) Vérifier qu'on a pour tous f,g :

$\varphi(u(f),g) = \varphi(f,u^*(g))$, $\varphi(u^*(f),g) = \varphi(f,u(g))$, $\varphi(v(f),g) = \varphi(u(f),u(g)) = \varphi(f,v(g))$.

c) Montrer que $\varphi(f,v(f))$ est réel $\geqslant 0$ pour tout f.

En déduire que toutes les valeurs propres de v sont réelles $\geqslant 0$.

SUJET N° 5 - Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormal Oxyz, on considère la cubique gauche Γ définie paramétriquement par les équations $x = t^3$, $y = 3t^2$, $z = 6t$.

1/ Déterminer le plan osculateur, l'arc, la courbure et la torsion de Γ en un point M(t).

2/ a) Écrire les équations paramétriques de la droite joignant O au point M(t).

b) En déduire les équations paramétriques, puis l'équation du cône C ayant O pour sommet et Γ pour directrice.

c) Écrire l'équation du plan tangent à C en un point distinct de O. Vérifier qu'il est le même en tout point d'une même génératrice de C.

3/ a) Écrire les équations paramétriques de la tangente T(t) à Γ au point M(t), puis les équations paramétriques de la surface S, ensemble de ces droites T(t).

b) Écrire l'équation du plan tangent à S en un point de T(t) autre que M(t). Vérifier que ce plan est le même en tout point de T(t) autre que M(t) et qu'il coïncide avec le plan osculateur à Γ au point M(t).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail